

DOI: 10.16285/j.rsm.2015.S2.041

一般条件下主动土压力的变分求解

陈建功^{1,2}, 徐晓核^{1,2}, 张海权^{1,2}

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045; 2. 重庆大学 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

摘 要: 基于库仑土压力理论的假设, 主动土压力是由墙后填土在极限平衡状态下出现的滑动体产生, 从墙后滑动体整体静力平衡方程出发, 推导出坡面起伏且有不均匀超载、倾斜墙背、黏性填土等一般情况下的主动土压力泛函极值的等周模型。在该基础上, 引入拉格朗日乘子, 将主动土压力问题转化为确定含有两个函数自变量的泛函极值问题。依据泛函取极值时必须满足的欧拉方程, 得到了线性的滑面函数和沿滑面线性分布的法向应力函数。结合边界条件和横截条件, 主动土压力泛函极值问题进一步转化为单个未知量的一维方程问题。通过算例, 土压力计算结果与库仑土压力理论解完全一致, 但土压力作用点在墙体的相对位置却并非总是作用在墙高的 1/3 处。通过算例进一步表明, 坡面的起伏和坡面超载的不均匀性对主动土压力大小和作用点位置有显著的影响。

关 键 词: 主动土压力; 变分方法; 滑裂面; 极限平衡法

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

文章编号: 1000—7598 (2015) 增 2—0310—05

A variational method for computing of active earth pressure under general conditions

CHEN Jian-gong^{1,2}, XU Xiao-he^{1,2}, ZHANG Hai-quan^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China; 2. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area of Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: On the basis of Coulomb's concept that the active earth pressure against the back of a retaining wall is due to the thrust force exerted by a sliding wedge of soil between the back of the wall. Considering an inclined rough retaining wall under the general conditions such as curvilinear fill, cohesive soil and uneven surface load, the functional extreme-value isoperimetric model about active earth pressure is deduced based on the force equilibrium equations of the sliding mass. Then the problem of active earth pressure is transcribed as the functional extreme-value problem of two undetermined functions by means of Lagrange undetermined multiplier. According to Euler equations, linear sliding surface function and linear normal stress function are obtained. Combined with the boundary conditions and transversality conditions, the problem of active earth pressure turned to be the solution of a one-dimensional equation. The magnitude of active earth pressure calculated by variational method is the same as that of Coulomb's theory; and the location of application point of earth pressure is not always at 1/3 height of the retaining wall by case studies. In addition, curvilinear fill and uneven surface load also have significant effect on the magnitude and the location of application point of active earth pressure.

Keywords: active earth pressure; variational method; slip surface; limit equilibrium

1 引 言

挡土墙上土压力的计算是经典的土力学课题, 通常采用朗肯土压力理论和库仑土压力理论进行分析。Coulomb 土压力理论是法国学者 Coulomb 于 1773 年在其力学论文论极大和极小法则在建筑力学中的应用中提出的, 距今已 200 多年了, 但直到

现在仍在重力式挡土结构设计中广泛应用。库仑主动土压力的求解有两种, 一种是极限平衡方法, 即通过对滑动面形成的隔离体的静力平衡分析, 确定沿滑动面发生滑动时的破坏荷载, 另一种是变分极限平衡法, 即挡墙上作用的主动土压力为两个未知函数的泛函极值问题, 一个未知函数为表示滑动面位置和形状的函数, 另一个函数为滑动面上作用的

收稿日期: 2014-09-22

基金项目: 国家“十二五”科技计划支撑课题 (No. 2012BAJ22B04)。

第一作者简介: 陈建功, 男, 1967 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土工程等方面的研究。E-mail: cjjg77928@126.com

法向应力函数, 通过变分方法进行求解。

变分极限平衡法最早是由Kopácsy 提出的^[1-3]。此后, 许多国内外学者Garber、Baker、Leshchinsky、Spencer、栾茂田等^[4-14]陆续将其应用于土体稳定性分析问题。近年来, 一些学者以墙后滑动体中的竖向土条为研究对象, 利用变分学的数学思想, 对挡墙上作用的土压力进行了有效的研究^[15-17], 但此方法必须假定土条间的法向应力和切向应力满足一定的比例关系。李兴高等^[18-20]以滑动体整体静力平衡的力平衡方程为基础, 将土体极限荷载的泛函极值问题转化为带有约束的函数极值问题, 但该方法最终还是采用优化方法对滑面倾角进行搜索, 而且所建模型为填土面水平, 墙背垂直的情况, 不能用于一般情况。本文采用整体极限变分法对一般情况下(倾斜墙背, 墙后黏性土体, 坡面为曲面, 填土表面有非均匀超载)库仑主动土压力进行了理论探讨, 并利用一维方程的搜索方法进行求解。

2 主动土压力整体极限平衡变分模型

2.1 滑动土体的整体极限平衡方程

如图 1 所示, 设挡土墙墙背粗糙且倾斜, 倾斜角 α , 墙高 H , 墙土之间的摩擦角为 δ , 墙后土体为重度 γ 的 Coulomb 材料, 可用其物性参数黏聚力 c 和内摩擦角 ϕ 表征, 墙后土体产生主动土压力时, 土体形成滑动楔体, 其滑裂面通过墙踵, 挡土结构刚性。对于平面应变问题, 土体表面用曲线 $y = g(x)$ 表示, 极限平衡状态下土体滑面用曲线 $y = s(x)$ 表示, 其中 $q(x)$ 为作用在土体表面的竖向压力集度; E_a 为作用在墙背上的主动土压力; $\sigma(x)$ 、 $\tau(x)$ 分别为作用在滑动面上的法向、切向应力。取墙后处于极限平衡状态的滑楔体 OAB 作为研究对象, 根据力的平衡方程:

由 $\sum X = 0$ 可得

$$E_a \sin(\alpha - \delta) + \int_0^{x_1} \tau dx - \int_0^{x_1} \sigma s' dx = 0 \quad (1)$$

由 $\sum Y = 0$ 可得

$$E_a \cos(\alpha - \delta) + \int_0^{x_1} \tau s' dx + \int_0^{x_1} \sigma dx - \int_0^{x_1} q dx - \int_{x_2}^{x_1} [\gamma(g - kx) + q] dx - \int_0^{x_1} \gamma(g - s) dx = 0 \quad (2)$$

式中: $s' = ds/dx$; x_1 为点 B 的 X 坐标; x_2 为点 A 的 X 坐标, $x_2 = -H/\tan\alpha$ 。设在滑面上法向应力 $\sigma(x)$ 和切向应力 $\tau(x)$ 服从 Mohr-Coulomb 破坏准则, 即

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (3)$$

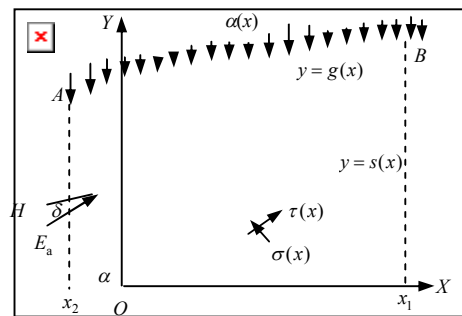


图 1 主动土压力计算模型

Fig.1 Computation model of passive earth pressure

2.2 主动土压力整体极限平衡变分模型

考察式 (1)~(3), 主动土压力 E_a 为自变量函数 $\sigma(x)$ 和滑面 $s(x)$ 的泛函极值问题。具体如下:

由式 (1) 可得泛函:

$$J = E_a \sin(\alpha - \delta) = \int_0^{x_1} F_0 dx \quad (4)$$

式中: $F_0 = s'\sigma - n_1\sigma - c$; $n_1 = \tan \phi$ 。

由式 (2) 得约束条件:

$$\int_0^{x_1} F_1 dx = \int_{x_2}^0 [\gamma(g - kx) + q] dx = \text{const} \quad (5)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= n_2(s'\sigma - n_1\sigma - c) + s'\sigma n_1 + \sigma + \gamma s - \gamma g + s'c - q \\ n_2 &= c \tan(\alpha - \delta); k = -\tan(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因式 (5) 等式右边为一定值, 上述泛函极值为等周问题。

3 主动土压力变分等周问题的求解

3.1 主动土压力等周问题的边值方程

根据欧拉定理, 用拉格朗日乘子法构造如下的泛函 J^* , 使上述条件极值问题转化为无约束的泛函极值问题:

$$\left. \begin{aligned} J^* &= \int_0^{x_1} F dx \\ F &= F_0 + \lambda F_1 = s'\sigma - n_1\sigma - c + \lambda [n_2(s'\sigma - n_1\sigma - c) + s'\sigma n_1 + \sigma + \gamma s - \gamma g + s'c - q] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: F 为辅助函数; λ 为拉格朗日乘子。依据等周问题极值存在的必要条件; 滑面方程 $y = s(x)$ 及沿滑面分布的法向应力 $\sigma(x)$ 必须满足欧拉微分方程、边界条件及可动边界处的横截条件:

(1) 辅助函数 F 的 Euler 微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial s'} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(2) 积分约束方程: 同式 (5)。

(3) 边界条件:

$$\left. \begin{aligned} s(0) &= 0, & (\text{固定边界条件}) \\ s(x_1) &= g(x_1), & (\text{可动边界条件}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(4) 可动边界处的横截条件:

$$\left(F - s' \frac{\partial F}{\partial s'} + g' \frac{\partial F}{\partial s'} \right) \Big|_{x=x_1} = 0 \quad (10)$$

3.2 土体中的滑动面、滑动面上的应力

由式 (8) 中第一式可得到

$$s' = a = \frac{\lambda n_1 n_2 + n_1 - \lambda}{1 + \lambda n_1 + \lambda n_2} \quad (11)$$

式 (11) 因 λ 、 n_1 、 n_2 均为定值, 故滑面为一斜率为 a 斜面。考虑边界条件, 则滑面方程为

$$y = s(x) = ax \quad (12)$$

a 除了满足式 (11) 外, 还要满足可动边界条件:

$$a = g(x_1) / x_1 \quad (13)$$

由式 (8) 中第二式, 可得

$$\sigma' = a_1 = \frac{\gamma \lambda}{1 + \lambda n_1 + \lambda n_2} \quad (14)$$

同样, 式 (14) 也为一定值, 沿滑面的法向应力 σ 呈线性分布, 即

$$\sigma = a_1 x + b_1 \quad (15)$$

由式 (11) 可得

$$\lambda = \frac{n_1 - a}{1 + n_1 + n_2 - n_1 n_2} \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (14) 可得

$$a_1 = \gamma \frac{n_1 - a}{1 + n_1^2} \quad (17)$$

由横截条件式 (10) 可得

$$\sigma(x_1) = \frac{c + \lambda c - \lambda c g'(x_1) + \lambda q(x_1)}{\lambda(1 - n_1 n_2) + g'(x_1)(1 + \lambda n_1 + \lambda n_2) - n_1} \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (15), 有

$$b_1 = \sigma(x_1) - a_1 x_1 \quad (19)$$

式 (13)~(19) 中, 只要确定未知数 x_1 , 其余各参量都能确定, 而 x_1 取决于积分约束条件式 (5)。

由以上讨论可知, 积分约束条件式 (5) 是以一个未知量 x_1 的方程, 因方程的复杂性, 可以采用一维搜索的方法, 比如二分法、黄金分割法等进行数值求解。根据式 (5), 令

$$G(x_1) = \int_0^{x_1} F_1 dx - \int_{x_2}^0 [\gamma(g - kx) + q] dx = 0 \quad (20)$$

展开得

$$G(x_1) = m_1 x_1^2 + m_2 x_1 - m_3 = 0 \quad (21)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= [aa_1(n_1 + n_2) + a_1(1 - n_1 n_2) + \gamma a] / 2 \\ m_2 &= ab_1(n_1 + n_2) + b_1(1 - n_1 n_2) + c(a - n_2) \\ m_3 &= \int_{x_2}^{x_1} [\gamma g(x) + q(x)] dx - \int_{x_2}^0 \gamma k x dx \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

本文采用 Matlab 提供的 $Fzero$ 功能函数进行求解, 此函数只需要建立 $G(x_1)$ 函数模块并给定一个初始值即可搜索出方程的解。一般可以采用 $y = \tan(\pi/4 - \phi/2)x$ 与 $y = g(x)$ 交点处的 X 坐标作为初始值, 搜索是比较迅速的。

求出 x_1 后, 由式 (13)、(15) 和式 (19) 得到滑面函数 $s(x)$ 和沿滑面分布的法向应力 $\sigma(x)$, 最后由式 (4) 求出主动土压力合力。

4 主动土压力的合力作用点位置

主动土压力合力作用点位置在确定了主动土压力大小后, 可根据滑动体 OAB 的力矩平衡求出。

由 $\sum M_O = 0$ 可得

$$H_0 = \left[\int_0^{x_1} (\sigma \sqrt{1 + s'^2} \sqrt{x^2 + s^2} + \gamma s x - q x) dx + \int_{x_2}^0 k x^2 dx - \int_{x_2}^{x_1} \gamma g x dx \right] \sin \alpha / E_a \cos \delta \quad (23)$$

式中: H_0 为土压力作用点至墙踵的垂直距离。

5 算例

5.1 与库仑土压力理论结果对比

考虑墙后土体坡面为一倾斜平面, 其上作用有均布荷载的, 填土为黏性土的一般情况下库仑主动土压力的改进公式为

$$E_a = \psi_c \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \quad (24)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} K_a &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2(\alpha + \beta - \phi - \delta)} \{ K_q [\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \delta) + \sin(\phi + \delta) \sin(\phi - \beta)] + 2\eta \sin \alpha \cos \phi \cos(\alpha + \beta - \phi - \delta) - 2[(K_q \sin(\alpha + \beta) \sin(\phi - \beta) + \eta \sin \alpha \cos \phi)(K_q \sin(\alpha - \delta) \sin(\phi + \delta) + \eta \sin \alpha \cos \phi)]^{1/2} \} \\ K_q &= 1 + \frac{2q}{\gamma H} \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad \eta = \frac{2c}{\gamma H} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中: q 为填土表面均布荷载; ψ_c 为主动土压力大系数; c 为黏聚力。土坡高度小于 5 m 时, 宜取 1.0;

高度为 5~8 m 时, 宜取 1.1; 高度大于 8 m 时, 宜取 1.2。

为了验证本文计算方法的合理性及正确性, 取墙高 4 m, 填土重度 18 kN/m^3 , 分别对 $c=0$ 和 $c \neq 0$ 情况下的计算结果与上述改进的库仑公式计算结果进行对比, 见表 1。从计算结果的对比可以看出, 当 $c=0$ 时, 土压力计算结果与库仑理论的计算结果是完全一致的, 当 $c \neq 0$ 时, 计算结果与用改进的库仑公式计算结果也是基本一致的。但力作用点位置并非总是作用在墙高的 1/3 处。

表 1 本文方法与库仑理论的计算结果对比
Table 1 Comparison of calculated results of active earth pressure with that of Coulomb

实例	本文解		库仑解	
	E_a / kPa	H_0 / m	E_a / kPa	H_0 / m
$c=0, q=0 \text{ kPa}$				
$\alpha=70^\circ, \beta=20^\circ$	100.340	1.982	100.340	1.333
$\delta=15^\circ, \phi=30^\circ$				
$c=0, q=10 \text{ kPa}$				
$\alpha=70^\circ, \beta=20^\circ$	124.952	2.178	124.952	1.333
$\delta=15^\circ, \phi=30^\circ$				
$c=8 \text{ kPa}, q=10 \text{ kPa}$				
$\alpha=70^\circ, \beta=20^\circ$	75.423	1.973	75.566	1.333
$\delta=15^\circ, \phi=30^\circ$				

5.2 坡面起伏和非均匀超载下的土压力计算

考虑墙后土体坡面起伏, $g(x)$ 用一倾斜斜线加一个正弦函数来模拟, 非均匀超载 $q(x)$ 一正弦函数加一常数来模拟, 见表 2。其他参数为 $c=8 \text{ kPa}$, $\alpha=70^\circ$ 、 $\delta=15^\circ$ 。

表 2 坡面起伏和非均匀超载下计算结果
Table 2 Calculated results of active earth pressure with curvilinear and uneven surface load

实例	本文解	
	E_a / kPa	H_0 / m
坡面无起伏, 超载均布 $q=10 \text{ kPa}$ $g = \tan 20^\circ x + 4(1 + \tan 20^\circ / \tan 70^\circ)$	111.937	1.171
坡面有起伏, 超载均布 $q=10 \text{ kPa}$ $g = \tan 20^\circ x + 4(1 + \tan 20^\circ / \tan 70^\circ) + \sin(2\pi x / 5)$	113.472	0.600
坡面无起伏, 超载非均布 $q=10 \text{ kPa} + 5 \sin(2\pi x / 5)$ $g = \tan 20^\circ x + 4(1 + \tan 20^\circ / \tan 70^\circ)$	111.332	1.004
坡面有起伏, 超载非均布 $q=10 \text{ kPa} + 5 \sin(2\pi x / 5)$ $g = \tan 20^\circ x + 4(1 + \tan 20^\circ / \tan 70^\circ) + \sin(2\pi x / 5)$	114.670	0.387

从计算结果可以看出, 坡面的起伏以及坡面超载的不均匀性对主动土压力合力和作用点的影响是不能忽视的。

6 结 论

(1) 从墙后滑楔体整体静力平衡方程出发, 推导了坡面为曲面, 且有非均匀超载, 倾斜墙背, 黏性填土等一般情况下的主动土压力泛函极值的等周模型。

(2) 通过欧拉微分方程分析, 得到了线性的滑面函数和沿滑面分布的法向应力函数, 从而证明了 Coulomb 土压力理论平面滑动破坏假定的合理性。

(3) 推导了以滑楔体 B 点 X 坐标为单个未知量的一维方程, 利用一维搜索方法通过求出此坐标值, 最后利用静力平衡方程求出主动土压力合力值及作用点位置。

(4) 当 $c=0$ 时, 土压力计算结果与库仑理论的计算结果是完全一致的; 当 $c \neq 0$ 时, 计算结果与用改进的库仑公式计算结果也是基本一致的, 但力作用点位置并非总是作用在墙高的 1/3 处。

本文的公式推导严密可靠, 所提出的计算方法适合于坡面起伏非均布超载的一般情况, 是对传统库仑主动土压力理论的继承和发展。通过算例表明, 坡面的起伏和坡面超载的不均匀性对主动土压力大小和作用点位置有显著的影响。

参 考 文 献

- [1] KOPÁSCY J. Über D Bruchflächen und bruchspannungen in den erdbauten[M]. Budapest: Akadémiaiadó, 1955, 81—99.
- [2] KOPÁSCY J. Three-dimensional stress distribution and slip surfaces in earth works at rupture[C]//Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. London, Britain: [s.n.], 1957: 339—342.
- [3] KOPÁSCY J. Distribution des contraintes à la rupture, forme de la surface de glissement et hauteur théorique des talus[C]//Proceedings of the 5th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. Paris, France: [s.n.], 1961: 641—650.
- [4] BAKER R, GARBER M. Variational analysis of the stability of slopes[C]//Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. Tokyo, Japan: [s.n.], 1977: 9—12.
- [5] BAKER R, GARBER M. Discussion of 'On slip surface and slope stability analysis' by Chen, Snitbhan[J]. Soils and Foundations, 1977, 17(1): 65—68.

- [6] BAKER R, GARBER M. Theoretical analysis of the stability of slopes[J]. *Géotechnique*, 1978, 28(4): 395—411.
- [7] GARBER M, BAKER R. Bearing capacity by variational method[J]. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 1977, 103(11): 1209—1225.
- [8] GARBER M, BAKER R. Extreme-value problems of limiting equilibrium[J]. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 1979, 105(10): 1155—1171.
- [9] SPENCER A J M, O'Mahony T C. An application of the calculus of variations to rectilinear flow of granular materials[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1985, 9(2): 225—235.
- [10] LESHCHINSKY D, BAKER R. Three-dimensional slope stability: End effects[J]. *Soils and Foundations*, 1986, 26(4): 98—100.
- [11] LESHCHINSKY D, SAN K C. Pseudostatic seismic stability of slopes: Design charts[J]. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1994, 120(9): 1514—1532.
- [12] 栾茂田, 金崇磐, 林皋. 非均质地基上浅基础的极限承载力[J]. *岩土工程学报*, 1988, 10(4): 14—27.
- LUAN Mao-tian, JIN Chong-pan, LIN Gao. Ultimate bearing capacity of shallow footings on nonhomogeneous soil foundations[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1988, 10(4): 14—27.
- [13] 栾茂田, 金崇磐, 林皋. 非均布地震载荷作用下土坡的稳定性[J]. *水利学报*, 1990, 35(1): 65—72.
- LUAN Mao-tian, JIN Chong-pan, LIN Gao. Soil slope stability under nonuniform earthquake load[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1990, 35(1): 65—72.
- [14] 栾茂田, 金崇磐, 林皋. 非均质土体稳定性分析的广义极限平衡法及其应用[J]. *大连理工大学学报*, 1991, 31(4): 463—471.
- LUAN Mao-tian, JIN Chong-pan, LIN Gao. Generalized limit equilibrium method with applications for stability analysis of nonhomogeneous soil structures and foundations[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1991, 31(4): 463—471.
- [15] 王鸿兴, 孙大庆. 挡土墙后土体滑裂面及土压力变分法初探[J]. *岩土工程学报*, 1989, 11(3): 86—93.
- WANG Hong-xing, SUN Da-qing. The soil sliding surface behind retaining wall and preliminary study of earth pressure by variational method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1989, 11(3): 86—93.
- [16] 孙大庆. 黏性填土主动土压力计算的新公式[J]. *中南水电*, 1991, 1(4): 65—70.
- SUN da-qing. New formula to calculate active earth pressure of clay fill[J]. *Central South Hydroelectricity*, 1991, 1(4): 65—70.
- [17] 陈文才, 徐金明. 土压力问题的变分解答[J]. *上海地质*, 1996, 17(2): 7—10.
- CHEN wen-cai, XU jin-ming. Variational solution to active earth pressure and passive earth pressure[J]. *Shanghai Geology*, 1996, 17(2): 7—10.
- [18] 李兴高, 刘维宁, 张弥. 关于库仑土压力理论的探讨[J]. *岩土工程学报*, 2005, 27(6): 677—681.
- LI Xing-gao, LIU Wei-ning, ZHANG Mi. Discussion on Coulomb earth pressure theory[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, 27(6): 677—681.
- [19] 李兴高, 刘维宁. Coulomb 土压力理论的两解法[J]. *岩土力学*, 2006, 27(6): 981—985.
- LI Xing-gao, LIU Wei-ning. Two methods to get the Coulomb earth pressure theory[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2006, 27(6): 981—985.
- [20] 李兴高, 刘维宁. 被动土压力作用的变分极限平衡法研究[J]. *工程力学*, 2007, 24(1): 11—17.
- LI Xing-gao, LIU Wei-ning. Study on the passive earth pressure by variational limit equilibrium method[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(1): 11—17.